



PII: S0017-9310(96)00229-3

# Potentialité d'instabilités dans un système thermique comportant deux températures de référence

C. ABID et F. PAPINI

Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels, Unité Mixte de Recherche du C.N.R.S.  
no 139, Université d'Aix-Marseille 1, Marseille, France

(Reçu 18 juillet 1995 et sous forme finale 24 juin 1996)

**Abstract**—Dans le cadre l'étude de la convection mixte dans un conduit horizontal, chauffé uniformément à la paroi, on met en évidence un phénomène d'instabilités thermiques de grande amplitude de la température pariétale. La description du mécanisme physique régissant ce phénomène a été effectuée par ailleurs et nous proposons ici l'établissement d'un concept thermodynamique permettant de justifier l'occurrence de ces fluctuations. Ce concept utilise les notions de températures représentatives du système et de températures de référence. On montrera comment un système, représenté par une seule température et disposant de deux températures de référence, adopte un comportement instationnaire correspondant à l'élimination sporadique dans le temps de l'une des deux températures de référence. © 1997 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

## 1. INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude de la convection mixte dans un conduit horizontal, non isolé de l'environnement, chauffé uniformément à la paroi, on met en évidence des instabilités de grande amplitude de la température pariétale. Ces instabilités apparaissent dans le régime laminaire; elles sont de nature intermittente, accompagnées d'une modification complexe de la situation thermohydrodynamique de fluide et correspondent à une chute brutale de la température de paroi; l'effet est d'autant plus important que les points de mesure se rapprochent du sommet d'une section droite. Bien que la description complète de ces évolutions, ainsi que celle des mécanismes physiques associés, a été effectuée [1, 2], il est pratiquement impossible, à partir d'une telle analyse, de justifier l'occurrence de ces fluctuations de grande amplitude en invoquant une cause fondamentale. Une approche plus globale, incluant des considérations de nature thermodynamique, en donne une vision plus synthétique conduisant à la formulation d'un concept associé. La démonstration utilisera la notion de température de référence que nous définirons. Nous montrerons ainsi que l'évolution du système thermique peut être décrite par les variations de deux températures représentatives, l'une d'entre elles étant référence pour l'autre; cette dernière dispose ainsi de deux températures de références puisque la température ambiante est aussi, naturellement, une référence. Les instabilités correspondent alors à l'élimination de l'une de ces références (cette élimination ne peut pas porter sur la température ambiante qui constitue la référence la plus robuste). On en déduira qu'un système thermique

possédant deux températures de référence est potentiellement instable et qu'il se ramènera à une seule, dans tous les cas où la physique du problème lui permettra de le faire. Avant cela, il est nécessaire de rappeler quelques caractéristiques thermiques et hydrodynamiques de cet écoulement, en régime laminaire. Ces dernières seront recherchées aussi bien au niveau expérimental qu'au niveau de la simulation numérique qui en a été faite. Par ailleurs, notre raisonnement utilisera la notion de comportement asymptotique pour la température de paroi; il s'agit en fait de l'extrapolation de la zone d'établissement hydrodynamique qu'il n'est pas possible de mettre complètement en évidence expérimentalement car le système change de comportement avant qu'elle ne puisse se développer pleinement. Cependant, cette zone extrapolée constitue la caractéristique essentielle de l'établissement hydrodynamique, puisqu'elle en exprime la véritable tendance.

D'un point de vue bibliographique, les études sur le phénomène de convection mixte permettent de distinguer trois centres d'intérêt relatifs d'une part, à l'établissement de corrélations permettant une caractérisation des transferts de chaleur, d'autre part, à la détermination numérique des champs de vitesse et de température dans le fluide et sur la paroi, enfin, au problème de stabilité des écoulements.

Pour ce qui concerne le dernier point, peu de publications en font état [3–5]; en particulier, au niveau de la température de paroi, une seule présente des courbes d'évolutions temporelles avec fluctuations de grande amplitude [5], tout à fait semblables à nos observations, mais aucune analyse de résultats n'est apportée.

## NOMENCLATURE

$T_h$	température de paroi pour le haut d'une section droite [°C]	$h_f$	coefficient d'échange entre le fluide et la paroi [ $\text{W m}^{-2} \text{°C}^{-1}$ ]
$T_b$	température de paroi pour le bas d'une section droite [°C]	$Re$	nombre de Reynolds
$T_m$	température moyenne de paroi sur une section droite [°C]	$z$	coordonnée axiale le long du conduit [cm]
$T_f$	température moyenne de fluide ou de mélange [°C]	$r$	distance radiale dans une section droite [cm]
$T_a$	température ambiante [°C]	$v$	vitesse moyenne du fluide ou vitesse débitante [ $\text{cm s}^{-1}$ ]
$T_r$	température de référence [°C]	$V(r, z)$	composante longitudinale de la vitesse du fluide.
$E$	densité de puissance apportée à paroi [ $\text{W m}^{-2}$ ]		
$h$	coefficient d'échange global paroi-ambiance [ $\text{W °C}^{-1} \text{m}^{-2}$ ]	Symboles grecs	
$H$	coefficient d'échange défini entre le haut et le bas d'une section droite [ $\text{W °C}^{-1} \text{m}^{-2}$ ]	$\gamma$	paramètre de la gaussienne
		$\theta$	distance angulaire dans une section droite ( $\theta = 0^\circ$ pour le haut et $\theta = 180^\circ$ pour le bas d'une section droite).

Les déterminations numériques, en régime laminaire, sont effectuées, le plus souvent, en vue de la détermination des échanges de chaleur entre le fluide et la paroi métallique. Diverses géométries et conditions expérimentales sont ainsi analysées, en particulier en régime laminaire [6–14]. Pour les cas qui sont proches de notre situation expérimentale (conduit cylindrique horizontal, chauffé uniformément ou non à la paroi), on notera que les écoulements secondaires sont de même nature que ceux que nous mettons en évidence par voie numérique [7, 10, 14].

Au plan expérimental, en régime laminaire, divers travaux ont été réalisés. Les résultats sont conformes à ceux que nous allons décrire [15–18], en particulier, pour ce qui concerne les distributions de température à la paroi sur une section droite et le long du conduit. Le mouvement en spirale des éléments fluides, lors du transport le long du conduit, a été visualisé [19].

Il faut remarquer que les interprétations physiques des évolutions spatiales de la température de paroi sont généralement peu développées. Aussi, une partie importante de notre exposé sera réservée à cette analyse, par ailleurs nécessaire pour conduire notre raisonnement.

## 2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Nos expériences concernent l'étude [2, 20] de l'écoulement d'un fluide monophasique (eau), dans un conduit cylindrique horizontal chauffé uniformément à la paroi. Le dispositif expérimental est présenté Fig. 1. Le conduit est en incoel, de 0,2 mm d'épaisseur. Son diamètre externe est de 1 cm et sa longueur totale de 2 m. La zone centrale, non isolée de l'environnement, d'une longueur de 1 m, correspond à la zone d'étude ou zone d'essai. Le première partie du conduit (précédant la zone d'essai) permet

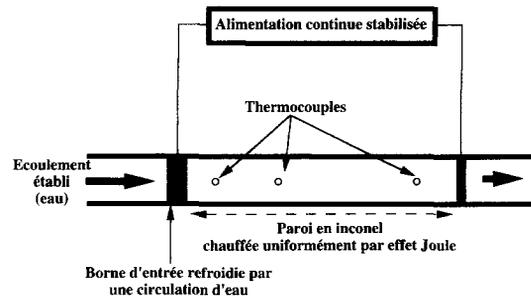


Fig. 1. Dispositif expérimental.

l'établissement hydraulique du fluide pour que l'écoulement soit du type 'Poiseuille' à l'entrée de cette zone. L'écoulement est ouvert à la sortie. La circulation du fluide est assurée par une pompe centrifuge de reprise à plusieurs étages (vitesse de rotation 2800 tours/minute). La vitesse moyenne d'écoulement  $v$ , ou vitesse débitante, est réglée par un débitmètre à bille. Le fluide passe par un échangeur de chaleur avant d'entrer dans le conduit de façon à imposer une température d'entrée constante. La paroi de la zone d'essai (dont la résistance électrique est de  $0,16 \Omega$ ) est chauffée électriquement en injectant directement, à ses bornes d'entrée et de sortie, un courant électrique continu. La borne électrique à l'entrée est maintenue à température constante par circulation fluide externe, cette température étant égale à celle du fluide à l'entrée du conduit. L'entrée de la zone d'essai est prise comme origine de la coordonnée axiale  $z$  (ou cote  $z$ ).

Afin de ne pas perturber l'écoulement, aucune mesure dans le fluide n'est mise en œuvre. Pour une vitesse de fluide et une densité de flux données, on mesure le champ de température externe à la paroi. Dans les expériences présentées, cette mesure a été

effectuée à l'aide de thermocouples de type 'K', de diamètre 0,2 mm; ils sont placés sur une génératrice passant par le sommet ou la base d'une section droite. La durée des expériences peut atteindre 7 h avec un pas d'acquisition des données de 0,2 s. Le nombre de thermocouples est de quatre répartis le long du conduit; la perturbation thermique résultante est alors négligeable. La précision de mesure est de 0,1°C. Les résultats qui seront présentés ont tous été obtenus avec les conditions d'expérience suivantes:  $z = 80$  cm,  $E = 20$  kW m<sup>-2</sup>,  $Re = 1900$ , soit une vitesse moyenne du fluide de 20 cm s<sup>-1</sup>. La densité de flux étant uniforme tout le long de la zone d'essai et compte tenu des niveaux de température atteints, les pertes thermiques externes du conduit sont approximativement de 400 W m<sup>-2</sup>; cette valeur a été déterminée à partir de l'évaluation d'une température moyenne de la paroi externe, en considérant un coefficient de transfert 'paroi-environnement' homogène et d'environ 10 W m<sup>-2</sup> °C<sup>-1</sup>. Elle ne constitue qu'un ordre de grandeur permettant d'effectuer une comparaison avec la densité de flux apportée par effet Joule montrant aussi qu'elle est pratiquement négligeable.

### 3. RAPPELS SUR LE RÉGIME LAMINAIRE

Les résultats expérimentaux, obtenus en régime laminaire, montrent un gradient de température entre le haut et le bas d'une section droite. Ceci est dû à un effet de gravité provoquant des écoulements secondaires transverses dans une section droite, qui se superposent à l'écoulement principal axial, ce qui se traduit par l'existence de deux rouleaux convectifs. Pour une valeur de  $E$  donnée, les distributions de la température sur une section droite varient en fonction de la cote  $z$  et de la valeur de la vitesse moyenne du fluide  $v$ . En fait, le paramètre significatif est le rapport  $z/v$  qui représente le temps passé dans le conduit par un élément fluide compris entre les cotes  $z$  et  $z + dz$ ; avec ce paramètre, l'ensemble des courbes, correspondant à des vitesses moyennes ou des cotes différentes, coïncident. Cette représentation permet de montrer que, d'un point de vue lagrangien, la structure de l'écoulement se modifie avec le temps, sous l'action de l'énergie apportée à la paroi. Par ailleurs, les valeurs des températures de paroi varient proportionnellement à la densité de puissance fournie.

Une modélisation numérique [20] utilisant le couplage des équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie a été effectuée, sous l'approximation de Boussinesq, le profil de vitesse étant de forme paraboloidale à l'entrée; les conditions sont libres à la sortie. Les équations n'ont pas été adimensionnées pour pouvoir tenir compte des variations des paramètres thermophysiques avec la température; les calculs ont été effectués par la méthode des éléments finis, à l'aide du logiciel FIDAP (fluid dynamics analysis package). Ces calculs ont été validés en comparant les distributions expérimentales et numériques

de la température de paroi sur une section droite et ceci pour différentes cotes. Ils montrent, en particulier, que pour une situation expérimentale donnée (même fluide, même géométrie du conduit, même puissance injectée à la paroi), les écoulements secondaires ont une structure qui ne dépend que du paramètre  $z/v$ . Les calculs numériques ont été menés jusqu'à une valeur de  $z/v$  égale à 20.

Les Figs. 2 et 3 montrent les distributions des vitesses transverses, obtenues numériquement, dans le fluide (écoulement secondaire) et les distributions de températures correspondantes, pour trois valeurs de la cote, dans la zone où l'évolution des écoulements secondaires est la plus perceptible. La Fig. 4 donne le profil des vitesses longitudinales (écoulement principal) correspondantes, dans un plan vertical passant par le centre du conduit. Le rapport entre la vitesse longitudinale maximale et la plus grande des vitesses transverses est, pour  $z/v$  égal à 2,2, proche de 30; pour  $z/v$  de l'ordre de 4, le rapport n'est plus que de 10. De plus, on constate sur la Fig. 4 que l'écoulement principal subit une décélération en haut des sections droites et une accélération en bas. Ceci est conforme aux résultats obtenus par d'autres auteurs; toutefois, on ne constate pas la présence d'écoulement de retour pouvant aller jusqu'à l'arrêt du fluide, comme cela a été montré dans le cas d'une autre géométrie et en envisageant des parois isothermes [21].

D'un point de vue phénoménologique, l'action de la gravité et de la chaleur injectée à la paroi se traduit par l'existence de deux rouleaux contrarotatifs. On a alors création d'un écoulement secondaire qui se superpose à l'écoulement principal longitudinal. Ce phénomène est, en outre, à l'origine de la déformation du profil des vitesses longitudinales. Pour la suite de notre exposé, nous aurons essentiellement besoin de ce profil, dans un plan vertical passant par le centre du conduit.

Dans un premier temps et pour asseoir notre propos, nous allons justifier par des arguments physiques, la déformation par rapport au profil de Poiseuille, mise en évidence à l'aide du calcul numérique.

Un élément de volume, placé dans le plan médian vertical, reçoit du fluide dans la direction verticale ainsi que du fluide selon la direction horizontale, dans le sens de l'écoulement principal. Le bilan fluide devant être nul, tout gain ou déficit dans une direction doit être compensé par l'autre. Ainsi, dans le haut

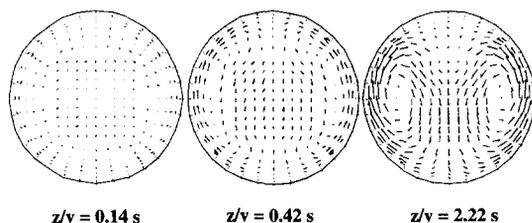


Fig. 2. Distribution des vitesses transverses dans le fluide pour différentes valeurs du paramètre  $z/v$ .

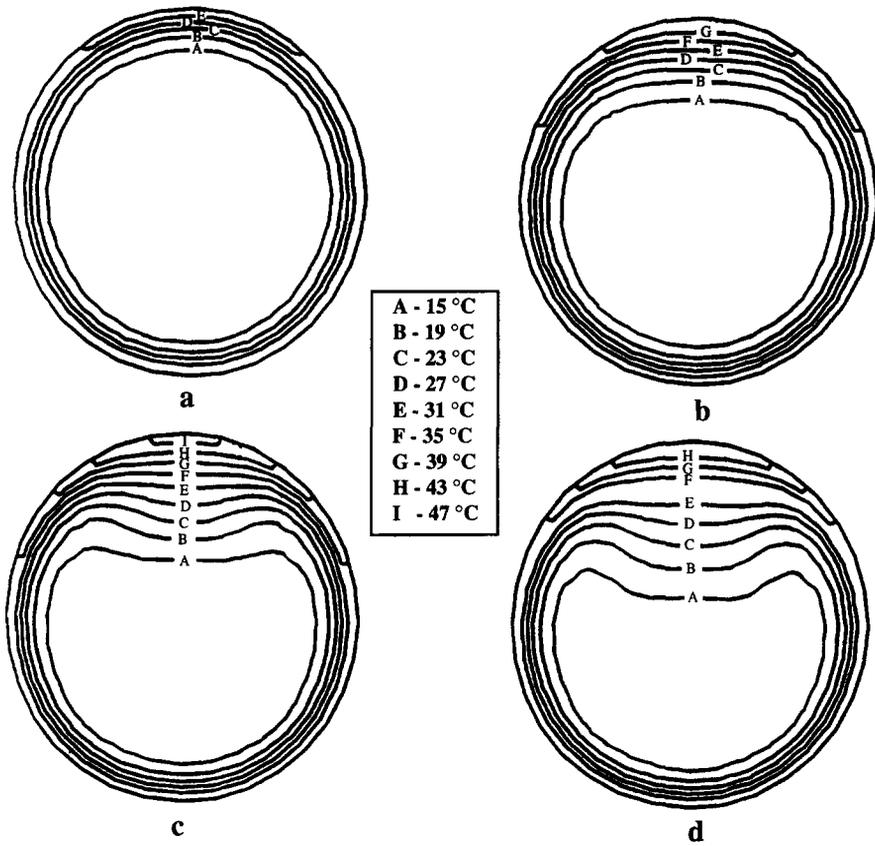


Fig. 3. Distribution des isothermes dans le fluide pour différentes valeurs du paramètre  $z/v$ : (a) 0,42 s; (b) 1 s; (c) 1,5 s; (d) 2 s.

d'une section droite du conduit, la direction verticale impose un gain (accroissement de la vitesse transverse verticale) qui doit être compensé par une décroissance des vitesses longitudinales. C'est l'effet contraire dans la partie basse, où la vitesse longitudinale doit augmenter. Le point correspondant à une variation nulle de la vitesse transverse verticale conserve la valeur de

la vitesse longitudinale fournie par le profil de Poiseuille.

A ce niveau, il est possible d'expliquer par un schéma simplifié le tassement des rouleaux convectifs vers le bas de la section droite lorsque la cote ou le rapport  $z/v$ , soit le temps passé par un élément fluide dans le conduit, augmentent. Ce schéma fait appel au

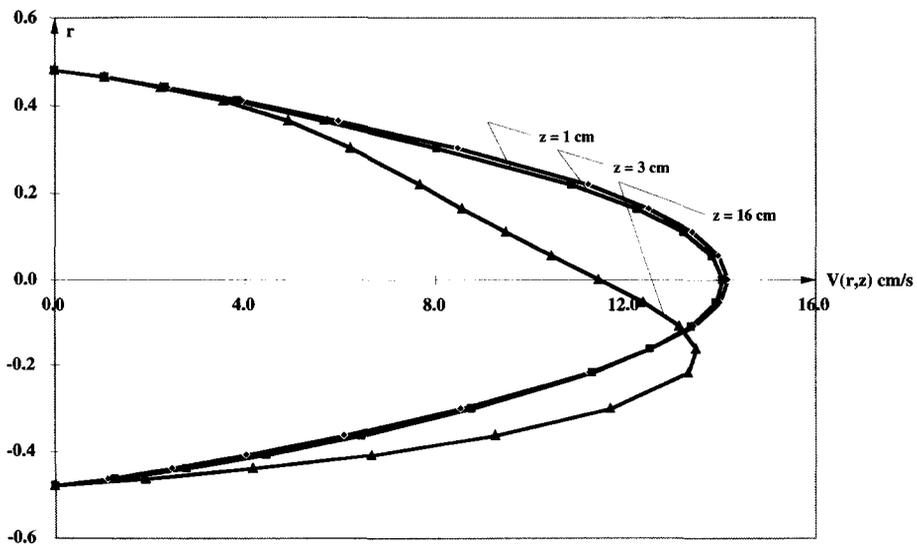


Fig. 4. Profil des vitesses longitudinales  $V(r, z)$  dans un plan vertical pour différentes cotes  $z$ .

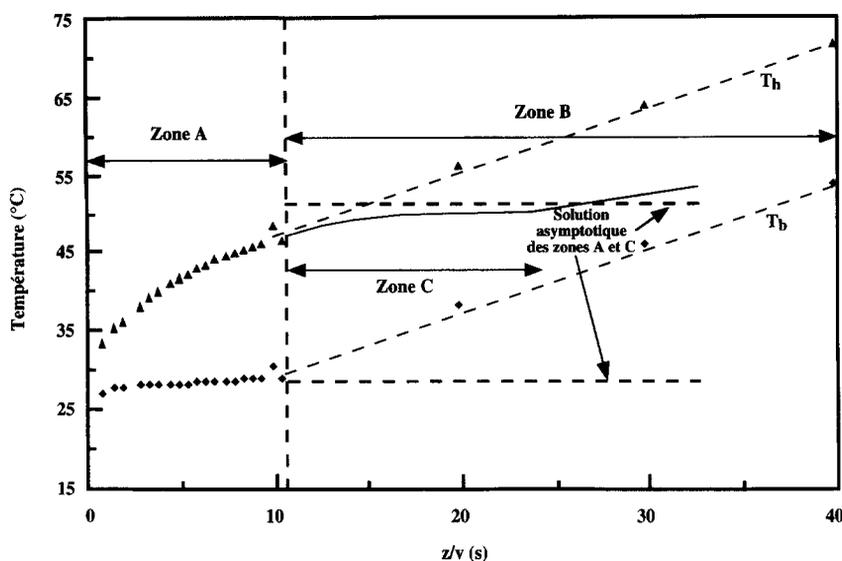


Fig. 5. Evolution de la température de paroi pour le haut et le bas d'une section droite en fonction du paramètre  $z/v$ .

premier principe de la thermodynamique. Dans une section droite, à l'entrée du conduit, les écoulements secondaires transportent de la chaleur depuis le bas de cette section jusqu'à en haut. Il s'en suit un accroissement de la température dans cette zone, celle-ci devenant alors supérieure à la température du bas. Dans ces conditions, ce transfert de chaleur ne peut plus s'effectuer que dans une zone plus profonde où la température est plus faible. Ce processus se perpétue lorsque le temps passe, provoquant une annulation progressive des vitesses transverses dans la zone supérieure, accompagnée de la création d'un gradient thermique qui s'oppose au passage de la chaleur du bas vers le haut. Ainsi, la zone inférieure ne peut plus communiquer d'énergie à la zone supérieure, que ce soit par conduction ou par convection naturelle. Le tassement des écoulements secondaires est toutefois limité puisque parallèlement la masse fluide s'échauffe lorsque  $z/v$  augmente. Il s'en suit alors un comportement différent correspondant à un accroissement des valeurs de l'ensemble du champ des températures.

Cette analyse nous conduit à considérer les zones hautes et basses des sections droites comme ayant des caractéristiques différentes. Celle du bas a pour fonction essentielle d'évacuer la chaleur vers la zone centrale du fluide. Son paramètre de contrôle est alors le coefficient de transfert local 'métal-fluide'. Le moteur de son évolution temporelle est constitué par l'énergie injectée dans cette zone. Le transfert devra alors augmenter avec  $z/v$  pour que la température correspondante reste constante. Pour la zone supérieure, il en va différemment, car sa structure thermohydrodynamique se modifie avec  $z/v$  en l'isolant de la zone basse. En fait, on peut dire que cette modification est essentiellement de nature topologique, au sens où l'évolution est principalement passive et liée à celle du bas de la section droite.

La Fig. 5 représente l'évolution expérimentale des

températures  $T_h$  et  $T_b$  en fonction du paramètre  $z/v$  et la Fig. 6 l'évolution correspondante pour le rapport  $k$  défini par :

$$k = \frac{T_h - T_a}{T_b - T_a}. \quad (1)$$

On a aussi porté sur ce graphe les variations du rapport  $k$  obtenues numériquement. Remarquons qu'au-delà d'une certaine valeur de  $z/v$  (zone B), les températures  $T_h$  et  $T_b$  évoluent parallèlement vers la stagnation, pour laquelle l'apport d'énergie et pertes externes sont égales. De même, la Fig. 5 montre un comportement différencié des zones A et B. Elle permet aussi de mettre en évidence une extrapolation de la zone A par un hypothétique équilibre thermohydrodynamique, qui aurait pu être atteint si le comportement B n'avait pas eu lieu (zone C). Nous donnerons plus avant l'analyse permettant d'expliquer le changement de comportement et justifier l'extrapolation proposée.

La Fig. 7 représente les évolutions de quelques composantes longitudinales de la vitesse, dans le plan vertical principal, pour divers rayons vecteurs  $r$ , en fonction de  $z/v$  (ce diagramme utilise le profil de Poiseuille comme origine). On constate les comportements très différents des zones haute et basse. En particulier, lorsque  $z/v$  croît, les vitesses longitudinales, dans le bas, augmentent pour compenser l'apport d'énergie. Pour la zone du haut (valeurs de  $r$  positives), les composantes passent par un minimum, celui-ci se manifestant au point  $(r, z)$  considéré, dès que les vitesses transverses diminuent et que, corrélativement, les vitesses longitudinales augmentent. En outre, l'accroissement de la vitesse longitudinale en haut du conduit, après passage par le minimum, induit une augmentation du coefficient de transfert local 'métal-fluide' par convection forcée, ce qui permet à  $T_h$  de

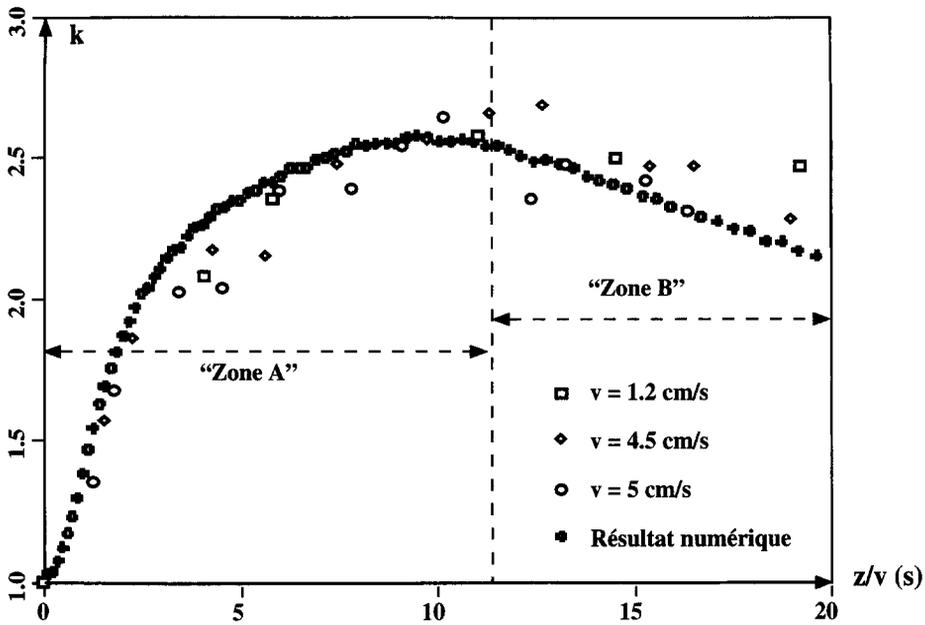


Fig. 6. Evolution du parametre  $k$  en fonction de  $z/v$ .

tendre vers une valeur indépendante de  $z/v$ . En fait, ce processus ne peut pas s'étendre à toutes les valeurs croissantes de  $z/v$ , puisque le profil de Poiseuille local retrouvé constitue une limite. Le comportement aurait dû être conforme à la tendance décrite zone C, cette dernière étant suivie d'une variation des températures semblable à celle décrite dans la zone B et ceci dès que le profil de Poiseuille est restitué en haut du conduit (nous avons fait figurer cette variation, avec une pente plus faible, puisque ce cas implique une augmentation moins importante de la température moyenne du fluide lorsque  $z/v$  croît) ; la valeur de  $z/v$ , notée  $(z/v)_1$ , pour laquelle ce changement aurait dû avoir lieu correspond à l'annulation des vitesses transverses en haut du conduit mais, sa détermination n'étant pas poss-

ible, on considèrera que la zone C constitue un comportement asymptotique qui tend vers une solution particulière (dite asymptotique) pour laquelle composantes des vitesses et températures ne dépendent plus de  $z/v$ . En effet, dans la réalité, le changement d'allure des courbes  $T_h$  et  $T_b$  se produit pour une valeur de  $z/v$  inférieure à  $(z/v)_1$ , l'établissement hydrodynamique étant atteint avant que la situation théorique que nous venons de décrire puisse être observée. Ceci est dû au fait que l'annulation des vitesses transverses est liée au phénomène de tassement des écoulements secondaires ; or, ce dernier ne se perpétue que si la température au cœur du fluide est suffisamment inférieure à  $T_b$ . Ce point est conforté par le fait que le calcul de la température moyenne du fluide, en fonc-

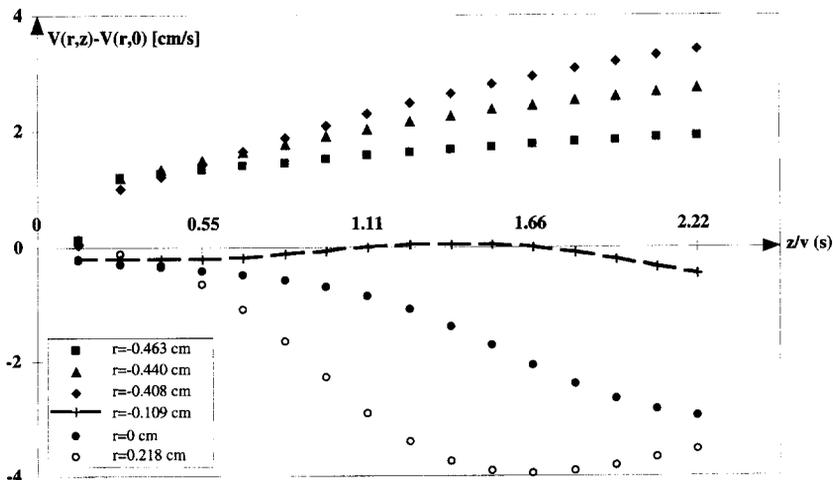


Fig. 7. Variation de l'écart de la composante de la vitesse longitudinale locale  $V(r, z)$  par rapport à la composante du profil de Poiseuille  $V(r, 0)$  en fonction de  $z/v$ , pour différentes valeurs de  $r$  ( $r$  positif pour le haut et négatif pour le bas d'une section droite).

tion de  $z/v$ , montre que cette dernière rejoint presque celle de  $T_b$  à la fin de la zone A (pour cela on utilise l'équation de bilan fluide, en négligeant les pertes externes), pour évoluer parallèlement ensuite. Ainsi, l'établissement hydrodynamique intervient avant que les écoulements aient opéré une séparation complète entre les domaines inférieur et supérieur de la section droite; l'effet bloquant est attribué à l'arrêt du tassement des rouleaux convectifs, ce qui entraîne aussi un changement de comportement simultané pour  $T_h$  et  $T_b$ .

La solution asymptotique du problème correspond à un équilibre thermohydrodynamique et son traitement permet d'effectuer une approche analytique dans laquelle l'ensemble des paramètres peut être calculé, sans faire appel à des valeurs expérimentales particulières. Par ailleurs, elle correspond à des comportements simplifiés, en particulier au niveau de l'indiscernabilité des transferts de chaleur interne et externe, à la paroi. Il faut rappeler que cette solution est associée à un accroissement des composantes de la vitesse longitudinale en haut et en bas du conduit, dans une section droite, pour toute augmentation du temps  $z/v$ .

**4. DÉFINITION DES TEMPÉRATURES REPRÉSENTATIVES**

Pour toutes les sections droites la distribution angulaire de la température de paroi est assimilable, de façon consistante, à une courbe de Gauss (voir annexe). On peut alors formuler cette température de paroi selon une expression qui ne dépend que de  $T_h$  et  $T_b$  et d'un paramètre  $\gamma$ , variable en fonction de  $z/v$ . On écrit ainsi :

$$T(\theta) = \frac{[T_h - T_b]}{1 - \exp(-\gamma\pi^2)} \times [\exp(-\gamma\theta^2) - \exp(-\gamma\pi^2)] + T_b \quad (2)$$

On peut alors poser :

$$a = \exp(-\gamma\pi^2) \quad (3)$$

La connaissance de  $T_h$  et  $T_b$  permet de calculer l'ensemble du champ de température, si  $\gamma$  est connu. On peut même étendre cette notion à tout le conduit,  $\gamma$  étant considéré comme un paramètre de réglage. Ainsi,  $T_h$  et  $T_b$  sont les températures représentatives du système thermique.

**5. DEFINITION D'UNE TEMPERATURE DE REFERENCE**

Nous allons définir ce que nous appelons température de référence  $Tr$ . Il s'agit de la température d'un puits infini de chaleur dans lequel est plongé un système thermique à la température  $T$ . On posera alors :

- $T = f(Tr)$  ;

- $Tr$  indépendant de  $T$  ;
- $Tr$  indépendant des conditions opératoires sur le système.

Si l'on considère la Fig. 5, dans la zone A, la température  $T_b$  est indépendante de  $z/v$ , alors que  $T_h$  varie. Compte tenu de la description des comportements des zones haute et basse, et de leur relation, on peut écrire, dans cette zone :

- $T_h = F(T_b)$  ;
- $T_b$  indépendant de  $T_h$ .

Par conséquent,  $T_b$  peut être considérée comme température de référence pour  $T_h$ . La robustesse de cette notion peut être remise en cause car la troisième condition n'est pas toujours vérifiée ( $T_b$  dépend, en particulier, de la densité de puissance injectée).

Par ailleurs, la température ambiante  $T_a$ , qui vérifie les trois conditions, peut être considérée comme température de référence pour  $T_h$  et  $T_b$ . Ainsi, la température  $T_b$  a pour référence  $T_a$ , alors que  $T_h$  a pour référence  $T_b$  et  $T_a$ . Dans les zones A et C (Figs. 5 et 6), on pourra alors écrire, par unité de surface :

$$E = h(T_m - T_a) + H(T_h - T_b) \quad (4)$$

où  $T_m$  est la température moyenne de la paroi, supposant ainsi que le transfert externe  $h$  est homogène sur l'ensemble du conduit,  $E$  la densité de puissance apportée à la paroi et  $H$  un coefficient de transfert qui devient constant dans la zone C. De plus, les pertes externes n'équilibrant pas la puissance fournie, le produit  $H(T_h - T_b)$  représente la densité de puissance transmise au fluide. Cette formulation est différente de celle communément écrite à partir d'un coefficient de transfert 'paroi-fluide'  $h_f$ , soit :  $h_f(T_m - T_f)$ . On a en fait défini un autre coefficient de transfert,  $H$ , par rapport à une autre différence de températures, qui n'est pas moins réaliste que  $h_f$ ; ce dernier est de toute façon discutable, au sens où les températures moyennes de fluide et de paroi peuvent ne pas constituer les variables consistantes, par suite de la dissymétrie du problème. Avec l'écriture ainsi adoptée le système est ramené, pour la dissipation interne, à une seule température représentative  $T_h$ , confrontée à une température de référence  $T_b$ . Pour conforter la notion de ' $T_b$ ' température de référence, il est alors nécessaire de vérifier que le bilan ainsi écrit a pour conséquence des résultats analytiques vérifiés avec suffisamment de concordance par l'expérience. Ainsi, on cherchera à retrouver une valeur asymptotique du paramètre  $k$  (soit  $k_1$ ) proche de celle qui peut être mise en évidence par extrapolation de la courbe expérimentale correspondant à la zone A.

Les déterminations de la température moyenne de paroi et du coefficient  $k$  (relation (1)), passent par la prise en compte d'une condition de comportement symétrique du conduit vis-à-vis des températures  $T_a$  et  $T_b$ , c'est à dire vis-à-vis des coefficients de transfert  $h$  et  $H$ . En effet, les températures de référence doivent être traitées de la même façon, le système étant dans

l'incapacité de les distinguer. Dans ces conditions, la température moyenne de paroi s'écrit, par intégration de l'expression de la température de paroi (relation 2), entre 0 et  $\pi$  :

$$R_m = \frac{[T_h - T_b]}{1-a} \frac{1}{2\sqrt{\gamma\pi}} - \frac{[T_h - T_b]}{1-a} a + T_b. \quad (5)$$

On peut alors réécrire l'expression du bilan sous la forme :

$$h(T_h - T_a) \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} - a \right] + h(T_b - T_a) \left[ 1 - \frac{\left( \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} - a \right)}{1-a} \right] = E - H(T_h - T_b). \quad (6)$$

A l'équilibre thermique et hydrodynamique, c'est à dire pour la solution asymptotique, les deux températures  $T_h$  et  $T_b$ , et toutes les températures de la paroi, échangent avec la température  $T_a$  de la même façon ; les deux coefficients multiplicatifs de  $h(T_h - T_a)$  et  $h(T_b - T_a)$  doivent donc être égaux. On en déduit :

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1+a} \right]^2. \quad (7)$$

A l'aide des deux relations liant  $\gamma$  et  $a$  (relations (3) et (7)), on trouve les valeurs suivantes :  $a = 0.0615$  et  $\gamma = 0.282$ . Il faut noter qu'expérimentalement le paramètre  $\gamma$  décroît avec  $z/v$  vers une valeur proche de celle qui vient d'être calculée.

La température moyenne devient, en reportant (7) dans (5) :

$$T_m = \frac{T_h + T_b}{2}. \quad (8)$$

A partir de (1), (4), (8), on peut ainsi obtenir deux expressions de  $E$ , telles que :

$$E = \left[ h + H \frac{2(k_1 - 1)}{k_1 + 1} \right] (T_m - T_a) \quad (9)$$

$$E = \left[ h \frac{k_1 + 1}{2(k_1 - 1)} + H \right] (T_h - T_b) \quad (10)$$

où  $k_1$  est la valeur asymptotique de  $k$  dans la zone C.

Le comportement identique du système vis-à-vis de  $T_a$  et  $T_b$ , conduit à des coefficients multiplicatifs de  $h$  égaux à l'unité. La valeur asymptotique de  $k$  est alors égale à 3, ce qu'approche le résultat obtenu expérimentalement (Fig. 6). Ceci permet de confirmer l'hypothèse faite concernant l'utilisation de  $T_b$  comme température de référence pour  $T_h$  (relation (4)).

Ainsi, la température  $T_h$  devrait tendre vers une valeur asymptotique, résultant de l'équilibre du bilan

énergétique établi par rapport aux deux températures de référence  $T_a$  et  $T_b$ . Comme nous l'avons signalé, le maintien du système dans un tel état résulte d'une modification progressive du profil des vitesses longitudinales, qu'il est incapable d'assurer de façon définitive. Devant cette impossibilité, la température  $T_b$  ne peut plus conserver sa propriété de référence et  $T_h$  opte ainsi pour la seule référence qui subsiste, soit  $T_a$ . De ce fait  $T_b$  devient représentative d'un système pour lequel  $T_a$  est aussi température de référence. Les deux températures  $T_h$  et  $T_b$  évoluent alors parallèlement vers la stagnation correspondant à l'égalité entre la puissance de la source de chaleur et les pertes externes. Ceci décrit les évolutions constatées dans la zone B.

Pour la solution asymptotique, la température moyenne est égale à la demi-somme des températures  $T_h$  et  $T_b$  ; ceci signifie que le système réunit en fait deux sous-systèmes indépendants, à l'équilibre. Cette situation se retrouve dans la zone C et, de façon approchée, dans la zone B ; les deux sous-systèmes évoluent alors par rapport à la température ambiante. La différence essentielle de comportements entre les zones B et C réside dans la notion de température de référence ; la première ne dispose que d'une seule référence  $T_a$  alors que la seconde conserve  $T_b$  et  $T_a$ . L'existence de deux sous-systèmes correspond à une structure d'écoulement où la zone supérieure, dans une section droite, ne comporte plus d'écoulements transverses et où règne un gradient thermique s'opposant au transport de la chaleur issu du bas du conduit ; à la limite, on obtient une isolation presque parfaite de cette zone vis-à-vis de la zone inférieure.

## 6. STABILITÉ D'UN SYSTÈME EN PRÉSENCE DE DEUX TEMPÉRATURES DE RÉFÉRENCE

Enonçons le principe de comportement suivant : dans le cas où un système thermique, disposant de deux températures de référence, contient une source d'instabilité primaire, on doit assister à des variations de la température qui vont dans le sens de l'élimination de l'une de ces références.

Ceci est visible sur les courbes d'évolution de  $T_h$  et  $T_b$  lors de l'occurrence d'un pic (Fig. 8). Deux traits pointillés ont été disposés : celui de droite sépare le domaine temporel quasi-stable du domaine où l'instabilité survient—celui de gauche est placé au temps pour lequel la contrainte, après avoir augmenté, décroît, c'est à dire au moment où l'effet stabilisant redevient prépondérant (ce trait est reporté sur la Fig. 9). Ce comportement est général, pour toute fluctuation quelles que soient la cote et la vitesse moyenne considérées ; seule l'amplitude et le nombre de fluctuations par unité de temps peuvent varier avec ces paramètres d'expérience. Les températures  $T_h$  et  $T_b$  tendent l'une vers l'autre et, dans ce cas, la température  $T_b$  perd sa caractéristique de température de référence. On retrouve alors deux températures représentatives du système, soit  $T_h$  et  $T_b$ .

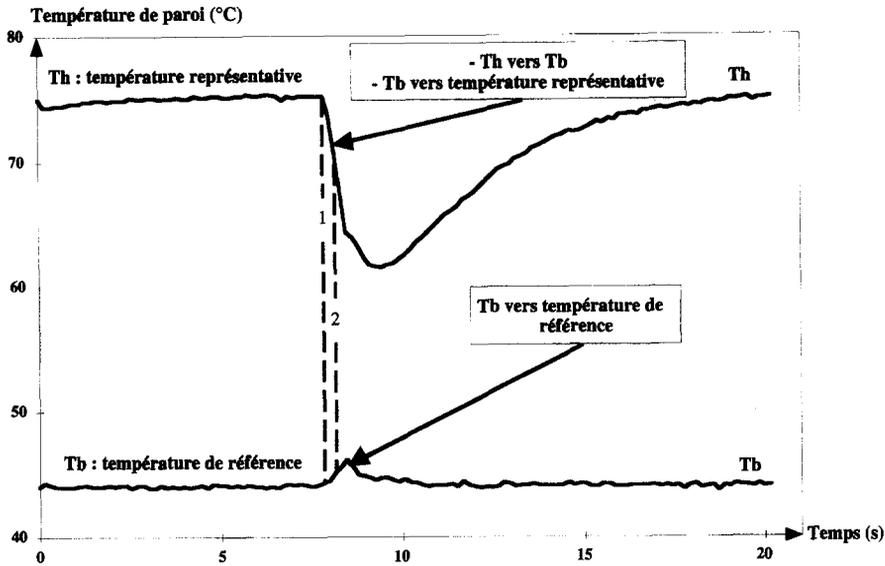


Fig. 8. Evolution d'une fluctuation de température lors du phénomène d'instabilités pour le haut et le bas d'une section droite (le trait pointillé 1 correspond au temps où se produit la transition entre l'état stable et l'état instable—le trait pointillé 2 correspond au temps où la contrainte exercée par l'effet déstabilisant décroît).

Les fluctuations sporadiques de la température de paroi  $T_h$  peuvent ainsi être analysées comme résultant de tentatives du système pour réaliser la condition  $T_h = T_b$ . En fait, en régime laminaire, ces tentatives sont interprétées comme des effets déstabilisants, les effets stabilisants étant reliés à  $T_b$ , que le système tend à conserver comme température de référence. Pour confirmer cette analyse, examinons les variations de la dérivée temporelle de  $T_h$  et  $T_b$ , lors d'une fluctuation (Fig. 9). On constate que le minimum de la dérivée de  $T_h$  se produit en même temps que le maximum de cette

dérivée pour  $T_b$ . L'effet de stabilisation intervient dès que l'effet de déstabilisation n'est plus prépondérant.

Enfin, un fait expérimental confirme le point de vue énoncé. En calorifugeant le conduit, on interpose une résistance thermique entre le système et la température d'environnement. On contribue ainsi à l'élimination volontaire de l'une des deux références, soit la température ambiante  $T_a$ . Les expériences étant effectuées dans les mêmes conditions, la Fig. 10 montre que l'amplitude et le nombre des fluctuations est plus faible quand le conduit est isolé. Il faut ajouter que les tem-

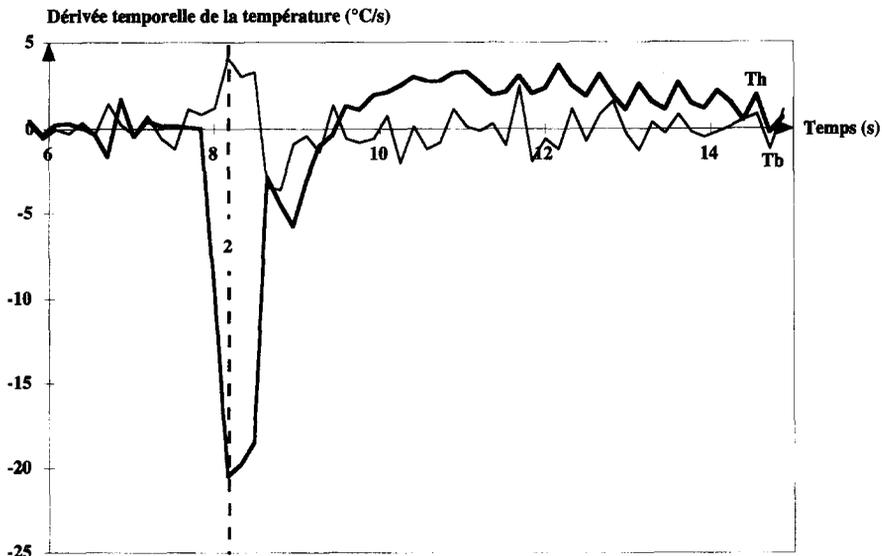


Fig. 9. Evolution des dérivées de la température du haut et du bas, pour la fluctuation représentée Fig. 8 (le trait pointillé 2 est le même que celui représenté Fig. 8).

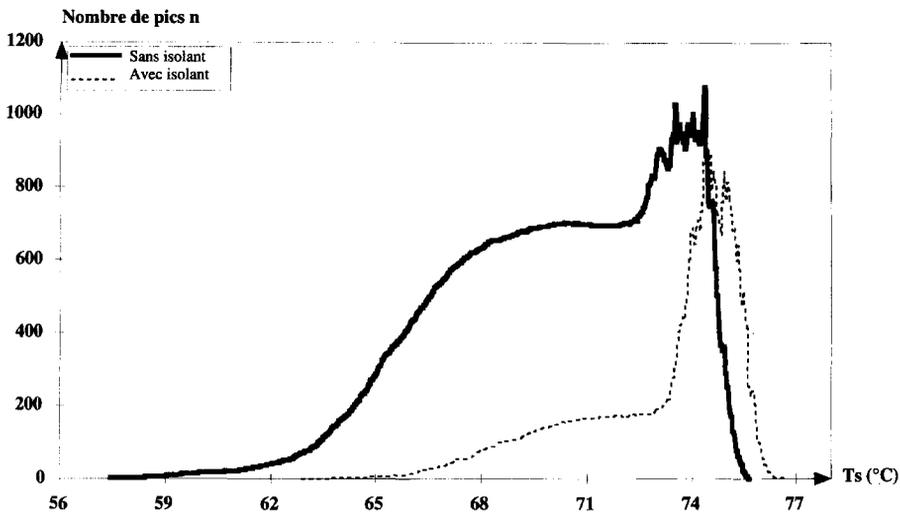


Fig. 10. Histogramme du nombre de pics, en fonction de la température, dans le cas du tube isolé et non isolé.

pératures de paroi sont très peu différentes dans les deux cas, les pertes externes étant négligeables devant la puissance apportée à la paroi. L'isolation utilisée est telle que les pertes externes sont divisées par un facteur de l'ordre de quatre, soit des pertes externes modifiées environ égales à  $100 \text{ W m}^{-2}$  (une fluctuation correspond à une diminution de ces pertes de l'ordre de  $50 \text{ W m}^{-2}$ ).

Le système thermique est donc le siège d'un conflit entre un effet déstabilisant qui tend à supprimer la température de référence  $T_b$ , pour ne lui restituer qu'une caractéristique de température représentative, et un effet stabilisant pour que  $T_b$  reste ou redevienne température de référence. Ce conflit est à l'origine de la création d'une dynamique non linéaire [22]. On peut alors imaginer que cette dynamique présente des solutions conduisant le système à fluctuer ou à rester stable. Dans tout les cas, cette dynamique non linéaire a besoin, pour s'exprimer, d'une instabilité primaire, que l'on peut attribuer ici à l'existence d'un point d'inflexion dans le profil des vitesses longitudinales [23]. Une telle propriété a été établie à partir de l'étude de stabilité des solutions de l'équation de Orr-Sommerfeld, montrant que tout profil des vitesses présentant un point d'inflexion est instable.

Pour terminer, on peut formuler une approche phénoménologique permettant d'expliquer les situations stables et instables du système thermique. Pour cela la Fig. 11 présente une vue simplifiée de la géométrie du dispositif dans lequel on a placé les isothermes nécessaires au déroulement du raisonnement. L'évolution de ces isothermes correspond au passage d'une tranche fluide élémentaire d'une cote  $z$  à une cote  $(z + dz)$ , c'est-à-dire à un accroissement de la densité d'énergie, à la paroi, égal à  $Edz/v$ . On supposera alors, pour satisfaire le premier principe de la thermodynamique, que l'intégralité de l'écoulement secondaire reste comprise entre la paroi inférieure (à la température  $T_b$ ) et son image thermique dans le

fluide (également à la température  $T_b$ ). Pour un déplacement  $dz$ , on constate, au niveau des isothermes  $T_b$  à la paroi et dans le fluide, que les énergies transférées ne sont pas identiques ; elle est plus faible dans le fluide que sur la paroi, puisque cette dernière récupère directement cette énergie sans l'interposition d'une masse fluide qui circule le long de l'axe  $z$  (ce qui est le cas entre le haut de la section droite et l'isotherme  $T_b$  dans le fluide). Si l'on fait l'hypothèse que la température de paroi dans le bas du conduit augmente sous l'effet de l'énergie acquise, l'isotherme  $T_b$  se déplacera vers l'intérieur du fluide d'une distance  $d_b$ . Le flux transféré étant plus faible dans le cœur du fluide, le déplacement de l'isotherme  $T_b$  correspondante sera moins important. Il s'agit alors de localiser la position, dans le fluide, de l'image de la nouvelle isotherme passant par le bas de la paroi ( $T_b + \Delta T_b$ ) ; sa distance à  $T_b$ ,  $d_h$ , est supérieure à  $d_b$  puisque le flux évacué est plus faible qu'au niveau de la paroi. L'image de la température de paroi en bas du conduit s'est donc rapprochée du haut du conduit.

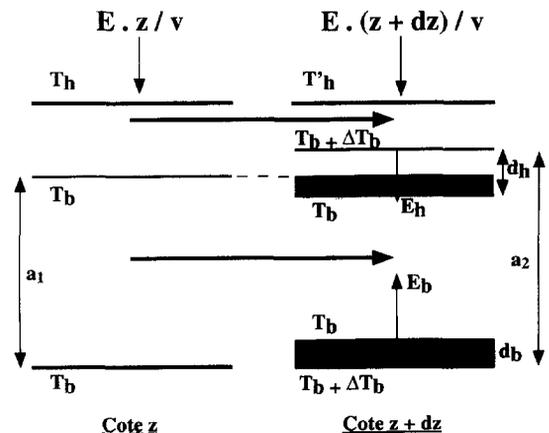


Fig. 11. Schéma simplifié de l'évolution de la position des isothermes lorsque l'on se déplace de la cote  $z$  à cote  $z + dz$ .

L'emplacement réservé aux écoulements secondaires est alors passé de la valeur  $a_1$  à la valeur  $a_2$ , avec  $a_2 > a_1$ . Ceci correspond à une extension de ces écoulements, ce qui est contraire à la situation invoquée pour le régime stable. La seule solution pour que les écoulements se contractent lorsque  $z$  augmente réside dans le fait que la température du bas de la section droite, à la paroi, reste constante. Ceci est un argument supplémentaire pour considérer que  $T_b$  est une température de référence pour  $T_h$ . Cependant, cette solution n'est quand même la seule possible et on comprend bien que l'instabilité se déroule selon le schéma que nous venons de décrire pour lequel, la température de la paroi en bas de la section droite augmente, l'écoulement secondaire s'étend, la température du haut diminue; on peut envisager le cas limite où, pour une cote  $z$  donnée, l'image de la température du bas de la section droite est suffisamment proche du haut, pour que les deux températures correspondantes soient presque égales. On rejoint ainsi le cas du tube vertical. L'existence sporadique de ce type de solutions est liée à une géométrie axissymétrique qui conduit à une solution thermique et hydrodynamique de même nature.

On peut maintenant donner une description des effets en compétition permettant de justifier l'occurrence des fluctuations de grande amplitude :

- déstabilisant, provoqué par l'écoulement principal qui tend à retrouver une symétrie axiale, les valeurs des températures  $T_h$  et  $T_b$  se rapprochant ;
- stabilisant, provoqué par l'écoulement secondaire qui tend à conserver sa structure sous l'action de l'énergie apportée et de la gravité; dans ce cas, la température du bas d'une section droite reste indépendante de  $z/v$  et est donc température de référence.

On peut alors continuer l'analyse par une étude de stabilité des solutions, ce que nous présenterons par ailleurs; nous avons voulu ici nous placer selon un point de vue différent en remarquant que la présence de deux températures de référence est associée à l'existence de fluctuations, susceptibles de disparaître si l'on supprime l'une d'entre elles.

## 7. CONCLUSION

Le système thermique étudié nous a permis de dégager un ensemble d'arguments conduisant à l'énoncé d'un concept justifiant l'occurrence des instabilités thermiques. Celui-ci est fondé sur la notion de température de référence et de température représentative. On note que, le système thermique ayant deux températures de référence, les instabilités correspondent à l'élimination de l'une d'entre elles. Il s'agit ici d'une description synthétique faisant abstraction d'un mécanisme particulier, qui bien entendu existe, en posant le problème de façon plus générale. On suppose alors que le système, obéissant à un principe fondamental, trouve les moyens de la satisfaire.

Le problème d'une généralisation de ce concept se pose alors. En effet, dans quelle limite un résultat établi sur une situation expérimentale particulière, peut-il être étendu et considéré comme une règle de comportement? A ce niveau, on peut considérer que le phénomène décrit s'apparente à l'effet de la convection naturelle opérant un transfert d'énergie entre deux températures de référence (la température ambiante et celle d'une plaque chaude maintenue à une température constante), sans pour autant pouvoir supprimer l'une des deux, leur consistance étant identique. Dans notre cas, c'est la température représentative du système qui subit les conséquences les plus importantes d'un conflit résultant du manque de robustesse de l'une des températures de référence par rapport à l'autre.

## REFERENCES

1. Abid, C., Papini, F. et Ropke, A. L'intermittence spatio-temporelle dans un écoulement cylindrique en circuit ouvert : détermination du champ de température externe par thermographie infrarouge et étude de comportement. *Journal de Physique III France*, 1993, **3**, 255-266.
2. Abid, C., Papini, F., Ropke, A. et Veyret, D. Etude de la convection mixte dans un conduit cylindrique. Approches analytique, numérique et détermination expérimentale de la température de paroi par thermographie infrarouge. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1994, **37**, 91-101.
3. Nagendra, H. R., Interaction of free and forced convection in horizontal tubes in transition regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 1973, **57**, 269-288.
4. El-Hawary, M. A., Effect of combined free and forced convection on the stability flow in a horizontal tube. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1980, **102**, 273-278.
5. Petukhov, P. S. et Polyakov, A. F. Flow and heat transfer in horizontal tubes under combined effect of forced and free convection. *Fourth International Heat Transfer Conference*, Vol. 4. NC3.7, 1970, pp. 1-11.
6. Ou, Jenn-Wuu, Cheng, K. C. et Lin, Ran-Chau, Natural convection effects on Graetz problem in horizontal rectangular channels with uniform wall temperature for large Pr. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1974, **17**, 835-843.
7. Patankar, S. V., Ramadhyani, S. et Sparrow, E. M., Effect of circumferentially nonuniform heating on laminar combined convection in a horizontal tube. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1978, **100**, 63-70.
8. Hieber, C. A., Mixed convection in an isothermal horizontal tube: some recent theories. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1981, **24**, 315-322.
9. Skerget, P., Alujevic, A., Kuhn, G. K. et Brebbia, C. A., Natural convection flow problems by B.E.M. *Ninth International Conference on Boundary Element Methods*, Stuttgart. Springer, Berlin 1987.
10. Law, Hin-Sum, Masliyah, J. H. et Nandakumar, K., Effect of nonuniform heating on laminar mixed convection in ducts. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1987, **109**, 131-137.
11. Mahaney, H. V., Incropera, F. P. et Ramadhyani, S., Development of laminar mixed convection flow in a horizontal rectangular duct with uniform bottom heating. *Numerical Heat Transfer*, 1987, **12**, 137-155.
12. Choudhurey, D. et Patankar, S. V., Combined forced and free laminar convection in the entrance region of an inclined isothermal tube. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1988, **110**, 901-908.

13. Ghajar, A. J. et Zurigat, Y. H., Microcomputer-assisted heat transfer measurement/analysis in a circular tube. *International Journal of Applied Engineers*, 1991, 7, 125-134.
14. Skerget, P., Zagar, I. et Alujevic, A., Combined forced and free convection in the inclined tube by B.E.M. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Proceedings of the First International Conference*, Southampton, Vol. 2. Computational Mechanics Publication, 1990, pp. 3-17.
15. Shannon, R. L. et Depew, C. A., Combined free and forced laminar convection in an horizontal tube with uniform heat flux. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1968, 90, 353-357.
16. Bergles, A. E. et Simonds, R. R., Combined forced and free convection for laminar flow in horizontal tubes with uniform heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1971, 14, 1989-2000.
17. Morcos, S. M. et Bergles, A. E., Experimental investigation of the combined forced and free laminar convection in horizontal tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1975, 14, 212-219.
18. Mori, Yasuo, Futagami, Kozo, Tokuda, Shinobu et Nakamura, Masakuni, Forced convective heat transfer in uniformly heated horizontal tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1966, 9, 453-463.
19. Newell, P. H. et Bergles, A. E., Analysis of combined free and forced convection for fully developed laminar flow in horizontal tubes. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 1970, 83-93.
20. Abid, C., La convection mixte dans un conduit horizontal; instabilités thermiques dans la transition 'laminaire-turbulent'. Thèse de Doctorat, Marseille, France, 1993.
21. Terhmina, O., Mojtabi, A. et Roux, B., A numerical procedure for three-dimensional mixed convection developing flows in an axisymmetric geometry. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 1992, 11, 21-38.
22. Abid, C., Papini, F. et Ropke, A., Turbulence et chaos dans un conduit horizontal soumis à un phénomène de convection mixte. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, 38, 287-294.
23. Schlichting, H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1979.

## ANNEXE

La notion de Gaussienne peut être mise en évidence à partir de l'exploitation d'une règle générale décrivant le phé-

nomène de convection mixte. En effet, celui-ci correspondant à une distribution homogène de la puissance apportée à la paroi, on peut attribuer l'évolution de la température de paroi, avec la cote, au transport, par l'écoulement principal, d'un phénomène unique régi par une loi du type  $f(\theta)$ . Dans ces conditions, cette température peut être adimensionnée entre 0 et 1 quelle que soit la cote, sous la forme  $T_0$ .

On écrit alors l'équation différentielle générale pour  $T_0$ :

$$\frac{1}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial z} = f(\theta)g(z) + H(\theta, z).$$

Dans cette expression, on peut, dans un premier temps, ne conserver que le premier terme du membre de gauche, le second traduisant l'interaction entre écoulement secondaire et écoulement principal et ayant pour effet de satisfaire la condition  $T_0 = 0$  pour  $\theta = \pi$ .

On définit alors une nouvelle température adimensionnée  $G_0$  qui ne rendra compte que de la déformation de la distribution de la température de paroi dans une section droite (déformation topologique). Cette grandeur sera telle que:

$$\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial z} = f(\theta)g(z).$$

Le choix d'une fonction paire pour  $f(\theta)$ , soit la plus simple  $f(\theta) = \theta^2$ , permet de trouver une courbe de Gauss ayant pour paramètre:

$$\gamma = \int_0^z g(z) dz.$$

On peut alors montrer qu'il existe un changement de variable permettant de calculer  $T_0$  en fonction de  $G_0$  (à partir duquel on obtient la relation (2)) et démontrer que si  $\gamma$  varie avec  $z$ , ce qui est le cas dans la zone A, il faut que  $T_0$  soit indépendant de la cote  $z$ ; au contraire, si  $T_0$  varie avec  $z$ , alors le paramètre de la gaussienne ne doit plus dépendre de  $z$ , ce que vérifie la zone B. En effet, le retour à la température vraie se traduit, dans le premier cas, par un changement d'échelle qui conserve la nature de la fonction:  $T$  et  $T_0$  font partie des fonctions qui ont une valeur minimale nulle quelle que soit la valeur de  $z/v$  (à l'origine des température près, que l'on choisit égale à la valeur constante de  $T_0$ ). Cette propriété n'est pas conservée si  $T_0$  dépend de  $z/v$  et la solution gaussienne n'est tolérable que si son paramètre  $\gamma$  est constant. En d'autres termes, dans la zone d'établissement hydrodynamique ( $\gamma$  dépendant de  $z/v$ ) la température  $T_0$  doit être indépendante de  $z/v$ . On retrouve ici encore la notion de température de référence, au sens où  $T_0$  ne dépend pas de  $z/v$  dans la zone d'établissement hydrodynamique et ceci de façon consistante.

## POTENTIALITY OF INSTABILITY OF A THERMAL SYSTEM CONTAINING TWO TEMPERATURES OF REFERENCE

**Abstract**—This paper deals with thermal instabilities occurring in a mixed convection phenomenon for a flow in a uniformly heated horizontal duct. These instabilities manifest themselves through the appearance of large amplitude temporal fluctuations in the wall temperature. The physical mechanism governing these instabilities has been described elsewhere, so here a thermodynamical concept is proposed which allows justification of the occurrence of such fluctuations. This concept is based upon the representative temperatures of the system and the reference temperatures. It is shown how a system which is represented by only one temperature, and containing two reference temperatures, adopts a non-stationary behaviour in order to eliminate sporadically one of the two reference temperatures. © 1997 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.